27　定積分で表された関数(1)

基本問題 & 解法のポイント

46

(1)

$$\int_0^{\pi}\sin t dt=\left[-\cos t\right]_0^{\pi}=2$$

$$\int_0^{\pi}t\sin t dt=\left[-t\cos t\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t dt=\pi+\left[\sin t\right]_0^{\pi}=\pi$$

(2)

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin t dt$ は $f(x)$ の定数項だから，$f(x)=x+a$ とおくと，

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t+a)\sin t dt\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}t\sin t dt+a\int_0^{\pi}\sin t dt\right)\\&=\frac{1}{\pi}(\pi+2a)\end{aligned}$$

より，$a=\frac{\pi}{\pi-2}$　$\therefore f(x)=x+\frac{\pi}{\pi-2}$

47

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(tx-\cos x)^2dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(t^2x^2-2tx\cos x+\cos^2x\right)dx\\&=t^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx-2t\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx\\&=t^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2t\left\{\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\right\}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\\&=\frac{\pi^3}{24}t^2-2t\left\{\frac{\pi}{2}-\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}+\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi^3}{24}t^2-2t\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\pi^3}{24}t^2+(2-\pi)t+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

よって，t^2 の係数は $\frac{\pi^3}{24}$，t の係数は $2-\pi$

A

161

$$f(x)=x+2\int_0^{\pi} f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$$
$$=x+2\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt\cdot\sin x-2\int_0^{\pi} f(t)\sin tdt\cdot\cos x$$

ここで，$2\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt=a,\ 2\int_0^{\pi} f(t)\sin tdt=b$ とおくと，

$f(x)=x+a\sin x-b\cos x$ より，

$$a=2\int_0^{\pi}(t+a\sin t-b\cos t)\cos tdt$$
$$=2\left(\int_0^{\pi} t\cos tdt+a\int_0^{\pi}\sin t\cos tdt-b\int_0^{\pi}\cos^2 tdt\right)$$
$$=2\left([t\sin t]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin tdt+a\int_0^{\pi}\frac{\sin 2t}{2}dt-b\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\right)$$
$$=2\left([\cos t]_0^{\pi}-a\left[\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^{\pi}-b\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}\right)$$
$$=2\left(-2-\frac{b\pi}{2}\right)$$
$$=-4-b\pi$$

$\therefore a+b\pi=-4$　・・・①

$$b=2\int_0^{\pi}(t+a\sin t-b\cos t)\sin tdt$$
$$=2\left(\int_0^{\pi} t\sin tdt+a\int_0^{\pi}\sin^2 tdt-b\int_0^{\pi}\cos t\sin tdt\right)$$
$$=2\left([-t\cos t]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos tdt+a\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-b\int_0^{\pi}\frac{\sin 2t}{2}dt\right)$$
$$=2\left(\pi+a\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}+b\left[\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^{\pi}\right)$$
$$=2\left(\pi+\frac{a\pi}{2}\right)$$
$$=2\pi+a\pi$$

$\therefore a\pi-b=-2\pi$　・・・②

①と②の連立方程式を解くと，$a=-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1},\ b=-\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}$

よって，$f(x)=x-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}\sin x+\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}\cos x$

162

(1)

$$f(0)=\int_0^{\pi}\left|\sin t-\sin 0\right|dt$$
$$=\int_0^{\pi}\sin t dt$$
$$=\left[-\cos t\right]_0^{\pi}$$
$$=2$$

(2)

$y=\sin t$，　$y=\sin x$ は $t=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称だから，

$$f(x)=\int_0^{\pi}\left|\sin t-\sin x\right|dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-\sin x\right|dt$$
$$=2\left(\int_0^{x}\left|\sin t-\sin x\right|dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-\sin x\right|dx\right)$$
$$=2\left(\int_0^{x}(-\sin t+\sin x)dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-\sin x)dt\right)$$
$$=2\left(\left[\cos t+t\sin x\right]_0^{x}+\left[-\cos x-t\sin x\right]_x^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=2\left(\cos x+x\sin x-1-\frac{\pi}{2}\sin x+\cos x+x\sin x\right)$$
$$=(4x-\pi)\sin x+4\cos x-2$$

(3)

$$f'(x)=4\sin x+(4x-\pi)\cos x-4\sin x$$
$$=(4x-\pi)\cos x$$

これと $f(x)$ の定義域 $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ より，　$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	2	↓	$2\sqrt{2}-2$	↑	$\pi-2$

よって，　$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 $2\sqrt{2}-2$ をとる。

163

(1)

$$B(3,\ 2)=\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx$$
$$=\int_0^1 (x^5-2x^4+x^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^6-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{60}$$

(2)

$$B(m,\ n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right)'(1-x)^n\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{m+1}x^{m+1}\cdot(-1)n(1-x)^{n-1}dx$$
$$=0+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx$$
$$=\frac{n}{m+1}B(m+1,\ n-1)$$

(3)

$B(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}B(m+1,\ n-1)$ より， $B(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}\cdot\dfrac{n-1}{m+2}\cdot\dfrac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{m+n-1}B(m+n-1,\ 1)$

補足： $B(p,\ q)$ とすると， $p+q=m+n$

これと，

$$B(m+n-1,\ 1)=\int_0^1 x^{m+n-1}(1-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{m+n}x^{m+n}-\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m+n+1}$$
$$=\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}$$

より，

$$B(m,\ n)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}\cdot\frac{1}{m+n}\cdot\frac{1}{m+n+1}$$
$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(4)

解法 1

$x-a=t$ とおくと，

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx = \int_0^{b-a} t^m (t+a-b)^n dt$$
$$= \int_0^{b-a} t^m \left[-\{(b-a)-t\}\right]^n dt$$
$$= (-1)^n \int_0^{b-a} t^m \{(b-a)-t\}^n dt$$

ここで，$C(m,\ n) = \int_0^{b-a} t^m \{(b-a)-t\}^n dt$ とおくと，

$$C(m,\ n) = \left[\frac{1}{m+1} t^{m+1} \{(b-a)-t\}^n\right]_0^{b-a} + \frac{n}{m+n}\int_0^{b-a} t^{m+1} \{(b-a)-t\}^{n-1} dt$$
$$= \frac{n}{m+n} C(m+1,\ n-1)$$
$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\cdots\frac{2}{m+n-1} C(m+n-1,\ 1)$$
$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\cdots\frac{2}{m+n-1} \int_0^{b-a} t^{m+n-1} \{(b-a)-t\} dt$$
$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\cdots\frac{2}{m+n-1} \left[\frac{b-a}{m+n} t^{m+n} - \frac{1}{m+n+1} t^{m+n+1}\right]_0^{b-a}$$
$$= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} (b-a)^{m+n+1}$$

よって，$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx = (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$

解法 2

$x-a=t$ とおくと，

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx = \int_0^{b-a} t^m (t+a-b)^n dt$$
$$= \int_0^{b-a} t^m \left[-\{(b-a)-t\}\right]^n dt$$
$$= (-1)^n \int_0^{b-a} t^m \{(b-a)-t\}^n dt$$
$$= (-1)^n \int_0^{b-a} \left\{(b-a)\frac{t}{b-a}\right\}^m \left\{(b-a)\left(1-\frac{t}{b-a}\right)\right\}^n dt$$
$$= (-1)^n (b-a)^{m+n} \int_0^{b-a} \left(\frac{t}{b-a}\right)^m \left(1-\frac{t}{b-a}\right)^n dt$$

ここで，$\dfrac{t}{b-a}=u$ とおくと，

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n\,dx = (-1)^n (b-a)^{m+n} \int_0^1 u^m (1-u)^n (b-a)\,du$$

$$= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \int_0^1 u^m (1-u)^n\,du$$

(3)より，$\displaystyle\int_0^1 u^m (1-u)^n\,du = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ だから，

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n\,dx = (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

B

164

(1)

$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\quad\left(\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ より，

$$I_n=\int_0^{2\pi}\left\{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\right\}^{2n}dx$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^n\int_0^{2\pi}\{\sin(x+\alpha)\}^{2n}dx$$

ここで，$x+\alpha=t$ とおくと，$x=2\pi\Leftrightarrow t=2\pi+\alpha,\ x=0\Leftrightarrow t=\alpha,\ dx=dt$ より，

$$I_n=\left(a^2+b^2\right)^n\int_\alpha^{2\pi+\alpha}(\sin t)^{2n}dt$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^n\left\{\int_\alpha^{2\pi}(\sin t)^{2n}dt+\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha}(\sin t)^{2n}dt\right\}$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^n\left\{\int_\alpha^{2\pi}(\sin t)^{2n}dt+\int_0^{\alpha}(\sin t)^{2n}dt\right\}$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^n\int_0^{2\pi}(\sin t)^{2n}dt$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^nJ_n$$

補足

三角関数では周期性と対称性を常に意識する。

(2)

$$J_n=\int_0^{2\pi}(\sin x)^{2n}dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\sin x(\sin x)^{2n-1}dx$$
$$=\int_0^{2\pi}(-\cos x)'(\sin x)^{2n-1}dx$$
$$=\left[-\cos x(\sin x)^{2n-1}\right]_0^{2\pi}+(2n-1)\int_0^{2\pi}\cos^2x(\sin x)^{2(n-1)}dx$$
$$=(2n-1)\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2x\right)(\sin x)^{2(n-1)}dx$$
$$=(2n-1)\int_0^{2\pi}(\sin x)^{2(n-1)}dx-(2n-1)\int_0^{2\pi}(\sin x)^{2n}dx$$
$$=(2n-1)J_{n-1}-(2n-1)J_n$$

よって，$J_n=\dfrac{2n-1}{2n}J_n\quad(n\geq 2)$

これと

$$J_1=\int_0^{2\pi}\sin^2 xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi$$

より，

$$J_n=\frac{2n-1}{2n}J_n$$
$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3}{2n\cdot 2(n-1)\cdot\cdots\cdots\cdot 4}J_1$$
$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{2n\cdot 2(n-1)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot 2\pi$$
$$=(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1\cdot\frac{1}{2^n n!}\cdot 2\pi$$
$$=\frac{2n!}{2n\cdot 2(n-1)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^n n!}\cdot 2\pi$$
$$=\frac{2n!}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2^n n!}\cdot 2\pi$$
$$=\frac{2n!}{2^{2n-1}(n!)^2}\pi$$

$I_n=(a^2+b^2)^n J_n$ より， $I_n=\dfrac{2n!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot(a^2+b^2)^n\pi$

165

(1)

交点の x 座標は $xe^x = ax$ すなわち $x\left(e^x - a\right) = 0$ の解である。

よって，$x = 0,\ e^x = a$

したがって，解が $0 < x < 1$ を満たすとき，$e^0 < a < e^1$　$\therefore 1 < a < e$

(2)

$f(x) - g(x) = x\left(e^x - a\right)$ より，

$0 \leq x \leq 1$ において，

(i) $0 < a \leq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
h(a) &= \int_0^1 (f(x) - g(x))dx \\
&= \int_0^1 xe^x dx - a\int_0^1 xdx \\
&= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= e - \left[e^x\right]_0^1 - \frac{a}{2} \\
&= 1 - \frac{a}{2}
\end{aligned}
$$

より，

$h(a)$ は単調に減少するから，$a = 1$ で最小値をとる。

(ii) $1 < a < e$ のとき

$$
\begin{aligned}
h(a) &= \int_{\log a}^1 (f(x) - g(x))dx + \int_0^{\log a} \{-f(x) + g(x)\}dx \\
&= \int_{\log a}^1 (f(x) - g(x))dx + \int_{\log a}^0 \{f(x) - g(x)\}dx \\
&= \left[xe^x\right]_{\log a}^1 - \left[e^x\right]_{\log a}^1 - a\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\log a}^1 + \left[xe^x\right]_{\log a}^0 - \left[e^x\right]_{\log a}^0 - a\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\log a}^0 \\
&= e - a\log a - e + a - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}(\log a)^2 - a\log a - 1 + a + \frac{a}{2}(\log a)^2 \\
&= a(\log a)^2 - 2a\log a + \frac{3}{2}a - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h'(a) &= (\log a)^2 + 2\log a - 2\log a - 2 + \frac{3}{2} \\
&= (\log a)^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$h'(a) = 0$ の解は $(\log a)^2 - \frac{1}{2} = 0,\ \log a > 0$ より，$\log a = \frac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore a = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

これと$(\log a)^2-1$は単調に増加することから，$h(a)$の増減は次のようになる。

a	1	$\cdots$	$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\cdots$	e
$h'(a)$	/	$-$	0	$+$	/
$h(a)$	/	↓	極小	↑	/

よって，$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$で最小値をとる。

(iii) $e\leq a$のとき

$$h(a)=\int_0^1\{-f(x)+g(x)\}dx$$
$$=-\left[xe^x\right]_0^1+\left[e^x\right]_0^1+a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$=-1+\frac{a}{2}$$

より，$h(a)$は単調に増加するから，$a=e$で最小値をとる。

(i)，(ii)，(iii)より，$h(a)$を最小にするaの値は$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$